

（付録B）数学の予備知識

統計学を理解するためには、ある程度は数学の知識が必要です。そこで、本書で最低限必要な数学の知識について整理しておきます。

★Σ（シグマ）記号の使い方

統計では「データ群の合計」を計算することが多いですが、その際には「Σ」（シグマ）という記号を使います。

■合計をΣで表す

例えば、「1から100までの合計」を式で表すことを考えてください。普通に書けば、以下ようになります。

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

これでも書き表すことはできますが、あまり効率の良い書き方だとはいえません。このような場合、「Σ」という記号を使うことで、すっきりと書き表すことができます。

例えば、上の式をΣを使って表すと、以下ようになります。

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Σ記号は、一般的には以下のような書き方をします。

$$\sum_{\text{変数=開始値}}^{\text{終了値}} \text{式}$$

この意味は「変数の値を開始値から終了値まで1つずつ変化させ、その変数の値を式の部分に代入して、それらの合計を求める」となります。

$\sum_{k=1}^{100} k$ の場合、変数はkで、開始値が1、終了値が100、式がkに対応します。したが

って、「変数kの値を1から100まで1つずつ変化させ、その値を式のkに代入して、それらの合計を求める」ということになります。このことから、1から100までの合計を求めることになります。

なお、ここでは変数に「k」を使いましたが、一般にはi、j、kなどの変数がよく使われます。

■ Σ の式の例

Σの式に慣れるために、例をいくつか見ておきましょう。

まず、以下の式はどのような意味になるでしょうか？

$$\sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k)$$

これは、「変数kの値を1から10まで1つずつ変化させ、その値を「 $k^2 + 2k$ 」の式に代入して、それらの合計を求める」という意味になります。式を展開して書けば、以下のようになります。

$$\sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) = (1^2 + 2 \times 1) + (2^2 + 2 \times 2) + (3^2 + 2 \times 3) + \cdots + (9^2 + 2 \times 9) + (10^2 + 2 \times 10)$$

また、以下の式はどのような意味になるでしょうか？

$$\sum_{i=1}^{10} 2^i$$

これは、「変数iの値を1から10まで1つずつ変化させ、その値を「 2^i 」の式に代入して、それらの合計を求める」という意味ですので、展開して書くと以下のようになります。

$$\sum_{i=1}^{10} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 + 2^{10}$$

また、以下の式はどうでしょうか？

$$\sum_{j=p}^q (2j+1)^2$$

これは、「変数 j の値を、変数 p の値から変数 q の値まで1つずつ変化させ、その値を「 $(2j+1)^2$ 」の式に代入して、それらの合計を求める」という意味になります。この例のように、開始値や終了値が変数で表されることもよくあります。

ちなみに、上の式を展開すると、以下のような式で表されることになります。

$$\sum_{j=p}^q (2j+1)^2 = (2p+1)^2 + \{2(p+1)+1\}^2 + \{2(p+2)+1\}^2 + \cdots + \{2(q-1)+1\}^2 + (2q+1)^2$$

■ データ群の合計を Σ で表す

今度は、「データ群の合計」を Σ で表してみましょう。

データ群を一般化する場合、データ群全体に「 x 」や「 y 」などの変数名をつけ、その右下に個々のデータを表す番号をつけるようにします。例えば、データが10個ある場合、そのデータ群全体に「 x 」と名前をつけるとすると、個々のデータは「 x_1 」「 x_2 」・・・「 x_{10} 」のように表します。

番号を変数で表すこともできます。例えば、 k 番目のデータは「 x_k 」と書くことができます。

この書き方を使えば、データ群の合計を Σ で表すことができます。例えば、個々のデータに、 x_1 、 x_2 ・・・と番号をつける場合、1番目から10番目までのデータの合計は、以下の式で表すことができます。

$$\sum_{k=1}^{10} x_k$$

また、データの個数を一般化して、 n 個と表すとしみましょう。その場合、 n 個のデータの合計は、以下のような式で表すことができます。

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

■Excelで合計を計算する

Excelでは、大量のデータを入力しておいて計算することができます。「SUM」という関数を使うことで、合計も計算することができます。SUM関数の書き方は以下のようになります。

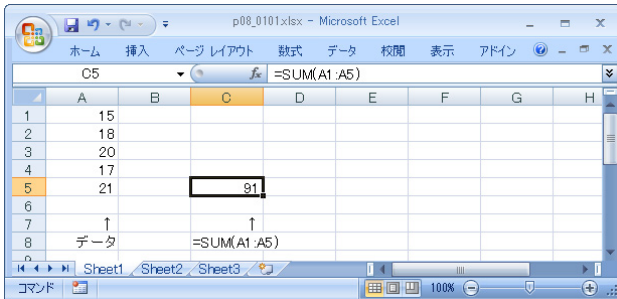
=SUM(<合計するセル範囲>)

例えば、A1セル～A5セルにデータが入力されている場合、これらのデータを合計するには、以下の式をどこかのセルに入力します（画面8.1）。

=SUM(A1:A5)

実際に入力する際には、まず「=SUM(」の部分を入力し、次に合計したいセル範囲をマウスでドラッグして「)」を入力し、最後にEnterキーを押します。この場合、「=SUM(」と入力した後、マウスでA1～A5セルをなぞってEnterキーを押します。

画面8.1 SUM関数でA1～A5セルの合計を計算する



★累乗と指数法則

統計は確率と関係が深いですが、確率関係の計算の中では「累乗」がよく出てきます。また、累乗計算では「指数法則」も重要です。

■累乗

同じ数を何度も掛け算することを、「累乗」(るいじょう)と呼びます(「べき」とも呼びます)。ある数 a を x 回掛け算することを「 a の x 乗」と呼び、「 a^x 」のように書きます。

$$a^x = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{x\text{回掛け算}}$$

例えば、 $2 \times 2 \times 2$ は2を3回掛け算する計算なので、「2の3乗」と呼び、「 2^3 」のように書きます。

■指数法則

累乗の計算には、いくつかの法則があります。それらを総称して「指数法則」と呼びます。指数法則には以下のようなものがあります。

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \times y}$$

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x$$

例えば、指数法則を使えば以下のような計算ができます。

$$2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$$

$$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 2^1$$

$$(2^4)^3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12}$$

■指数法則の拡張

上で説明した指数法則を拡張して、いくつかの定義をします。

$a^x \div a^x$ は、 a^x をそれと同じ数で割るので答えは1です。一方、これを指数法則で考えると、 $a^x \div a^x = a^{x-x} = a^0$ となります。このことから、「 $a^0 = 1$ 」と定義します（ただし、 a は0以外の値）。

さらに、 a^{-x} は以下のように定義します（ただし、 a は0以外の値）。

$$a^{-x} = a^{0-x} = a^0 \div a^x = 1 \div a^x = \frac{1}{a^x}$$

■累乗根と指数

「2乗すると3になる数」のように、何乗かするとある数になる場合、その元の数のことを「累乗根」と呼びます。一般化して、 n 乗すると a になる数のことを、「 a の n 乗根」と呼び、「 $\sqrt[n]{a}$ 」のように書きます。例えば、2を3乗すると8になりますので、2は8の3乗根ということになります。これを式で書くと、「 $\sqrt[3]{8} = 2$ 」となります。

では、ここで「 $a^{\frac{1}{x}}$ 」のような指数を考えてみましょう。これはどのような値を意味するのでしょうか？

先ほど指数法則を紹介しましたが、その中に「 $(a^x)^y = a^{x \times y}$ 」という法則がありました。この性質を使うと、以下が成り立つように $a^{\frac{1}{x}}$ を定義しておけば、扱いやすくなります。

$$\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = a^{\frac{1}{x} \times x} = a^1 = a$$

一方、この式は「 $a^{\frac{1}{x}}$ を x 乗すると a になる」ことを意味しています。このことから、 $a^{\frac{1}{x}}$ は a の x 乗根であることが分かります。したがって、以下のような関係が成り立ちます。

$$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$$

例えば、 $8^{\frac{1}{3}}$ は8の3乗根になりますので、 $8^{\frac{1}{3}} = 2$ と計算することができます。

■指数関数

変数 x と変数 y の間に以下のような関係がある場合、 y は「 a を底とする指数関数」と呼びます（ただし、 a は0より大きく、1でない数）。

$$y = a^x$$

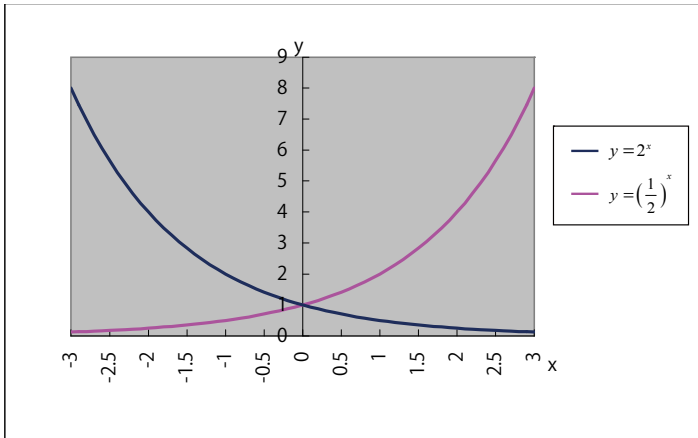
$a > 1$ の場合、 x の値が大きくなるほど y の値も大きくなります。一方、 $a < 1$ の場合、 x の値が大きくなると y の値は小さくなります。また、 a の値に関わらず（ただし $a \neq 0$ ）、 x の値が0のときに y の値は1になります（図8.1）。

指数関数の中では、底が「 e 」という値になっているものが重要です。 e は「自然対数の底」と呼ばれる値で、円周率の π と並んでよく使われる値です。以下の式で n をどんどん大きくすると一定の値（2.71828...）に近づいていきますが、その極限を「 e 」と表します。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

統計の世界でも、 e が底になっている指数関数はよく登場します。ちなみに、 $e = 2.71828 \dots$ です。

図8.1 指数関数の例



■Excelで累乗を計算する

Excelで累乗を計算するには、「POWER」や「EXP」の関数か、「^」の記号を使います。

POWER関数は、 a^x の形の累乗を計算する時に使います。書き方は以下のようになります。

=POWER(a,x)

例えば、 2^3 をPOWER関数で計算するには、セルに以下の式を入力します(画面8.2)。

=POWER(2,3)

また、POWER関数は「^」の記号で書くこともできます。例えば、 2^3 を計算する場合、セルに「=2^3」と入力してもかまいません。

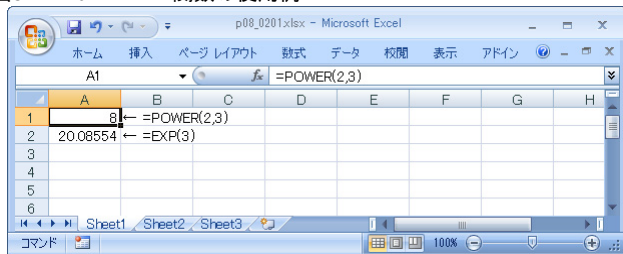
一方、EXP関数はeの累乗を計算する時に使います。書き方は以下のようになります。

=EXP(x)

例えば、 e^3 をEXP関数で計算するには、セルに以下の式を入力します(画面8.2)。

=EXP(3)

画面8.2 POWER / EXP関数の使用例



★対数

対数は指数の逆を行うような計算です。指数との関係で対数が出てくることがありますので、対数も紹介しておきます。

■対数の基本

まず、対数がどのようなものかということから、話を始めましょう。

今、 $a^x = b$ のような関係が成り立っているとします。この関係を満たす x を、「 a を底(てい)とする b の対数」と呼び、「 $\log_a b$ 」のように書きます。対数と指数の間には、以下のような関係があります。

$$a^x = b \longleftrightarrow x = \log_a b$$

例えば、 $2^3 = 8$ なので、 $\log_2 8 = 3$ が成り立ちます。また、 $a^1 = a$ 、 $a^0 = 1$ の関係から、それぞれ $\log_a a = 1$ 、 $\log_a 1 = 0$ が成り立ちます。

■対数法則

対数では以下のような法則が成り立ちます。ただし、 c は0より大きく1でない数で、 a と b は0より大きい数です。

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c a^b = b \log_c a$$

例えば、以下のような計算が成り立ちます。

$$\log_{10} 30 = \log_{10} (10 \times 3) = \log_{10} 10 + \log_{10} 3 = 1 + \log_{10} 3$$

$$\log_2 0.5 = \log_2 (1 \div 2) = \log_2 1 - \log_2 2 = 0 - 1 = -1$$

$$\log_3 81 = \log_3 (3^4) = 4 \log_3 3 = 4 \times 1 = 4$$

■底の変換公式

「底の変換公式」という公式もあります。 $a/b/c$ がすべて0より大きく、また a/c が1でない数の場合、以下の法則が成り立ちます。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例えば、以下のような計算が成り立ちます。

$$\log_3 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 3}$$

■自然対数と常用対数

対数では底としていろいろな値を取ることができますが、数学の世界では底を e にした対数をよく使います(e についてはXXページを参照)。

e を底にする対数を「自然対数」と呼びます。自然対数を書き表す場合、通常は底の e を省略して、 $\log x$ のように書きます($\log x = \log_e x$ ということです)。

また、底を10にした対数もよく使います。このような対数は「常用対数」と呼びます。

■ e の累乗への変換

a と b をプラスの任意の数とし、 a/b の間に以下の関係が成り立っているとします。

$$b^x = a \quad \dots$$

この場合、 $\log$ の定義から、 x は以下のように求められます。

$$x = \log_b a$$

この x を先ほどの式 に代入すると、以下が成り立ちます。

$$b^{\log_b a} = a$$

a と b はプラスの任意の数ですが、自然対数の底 e もプラスの数なので、上式の b を e に置き換えても成り立ちます。したがって、以下が成立します。

$$e^{\log a} = a$$

この性質を使えば、任意のプラスの数を、 e の累乗の形に変換することができます。例えば、 a の x 乗を e の累乗に変換すると、以下のようになります。

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

■Excelで対数を計算する

Excelで対数を計算するには、「LOG」「LOG10」「LN」という関数を使います。

LOG関数は、底の値を自由に指定できる関数です。 $\log_a b$ を計算するには、セルに以下のような式を入力します。

$$=LOG(b,a)$$

例えば、 $\log_2 5$ をLOG関数で計算するには、セルに「=LOG(5,2)」と入力します(画面8.3)。

LOG10関数は、常用対数(底が10の対数)を計算するときに使います。また、LN

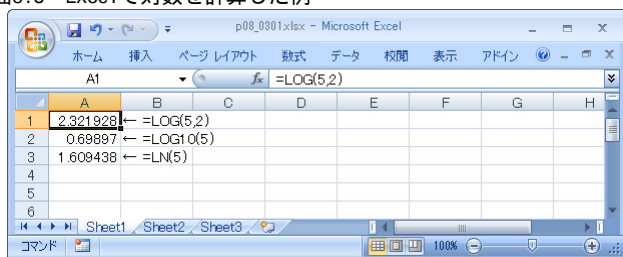
関数は自然対数（底がeの対数）を計算するものです。それぞれ、以下のようにセルに式を入力します。

$$\log_{10} x \dots =\text{LOG10}(x)$$

$$\log x \dots =\text{LN}(x)$$

例えば、 $\log_{10} 5$ や $\log 5$ を計算するには、それぞれ「=LOG10(5)」「=LN(5)」の式をセルに入力します（画面8.3）。

画面8.3 Excelで対数を計算した例



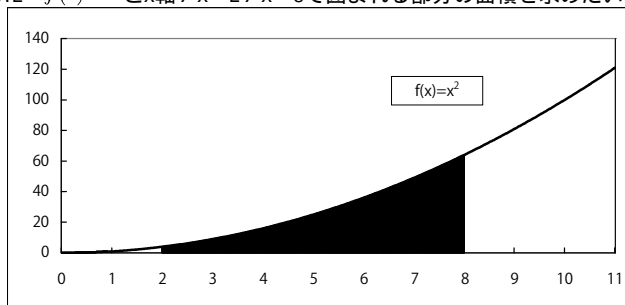
★積分

数学のいろいろな分野で、積分はよく使われます。統計でも積分を使います。ただ、本書では積分の大まかな概念だけ理解していれば十分ですので、それについてお話しておきます。

■積分＝細かく切って足し合わせる

図形の面積を求める際に、曲線で囲まれた部分の面積を求めることもあります。例えば、図8.2の網の部分の面積を求めるような場合です。このような時には、どうすれば良いのでしょうか？

図8.2 $f(x) = x^2$ と x 軸 / $x=2$ / $x=8$ で囲まれる部分の面積を求めたい



■長方形で近似して大雑把に面積を求める

まず、図8.3のように、面積を求める部分を長方形で近似して、大雑把に面積を求めることにしましょう。この図だと、 x を2から1ずつ変えて、それに対応する $f(x)$ の値（＝長方形の高さ）を求める形になっています。

例えば、 $x=2$ に対する $f(x)$ の値は2の2乗で4なので（図8.4）、 $x=2$ から $x=3$ まで

の長方形の面積は、幅が1、高さが4で4となります。同様に、 $x = 3$ から4の長方形、4から5の長方形・・・とそれぞれの長方形の面積を求め、それらを合計すると(表8.1) 大雑把な面積が139と求められます。

図8.3 長方形で近似して大雑把に面積を求める

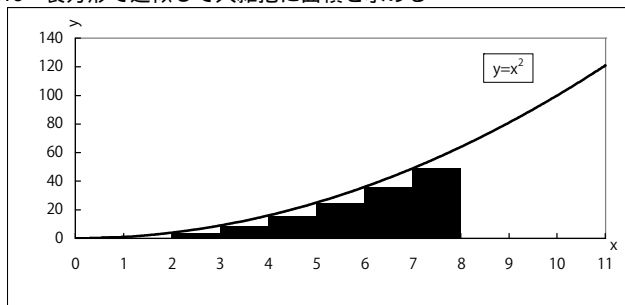


図8.4 図8.3の $x = 2$ の近辺を拡大した

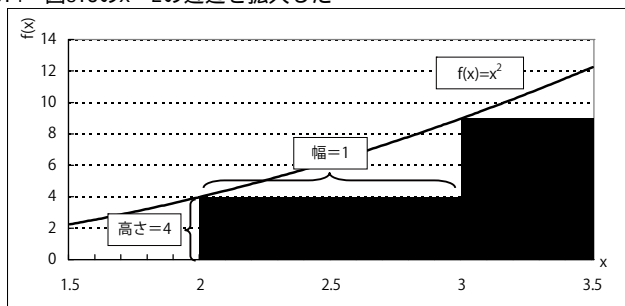


表8.1 それぞれの長方形の面積とその合計

x	f(x) (高さ)	面積
2 ~ 3	4	4
3 ~ 4	9	9
4 ~ 5	16	16
5 ~ 6	25	25
6 ~ 7	36	36
7 ~ 8	49	49
合計		139

■刻みを小さくする

図8.3では x を1ずつ刻んで大雑把に面積を求めましたが、この刻みの幅を小さくすれば、求めたい面積（図8.2の網の部分の面積）により近づきます。例えば、図8.5は x を0.2ずつ刻んだ場合ですが、図8.3に比べてより求めたい面積に近づいていることが分かります。

ちなみに、図8.5で各長方形の面積を計算し、その合計を求めると、表8.2のようになります。

さらに刻みの幅を小さくして0に近づけていく（逆に言えば、刻みの数を無限に増やす）と、最終的には求めたい面積になります。

図8.5 x を0.2ずつ刻んだ場合

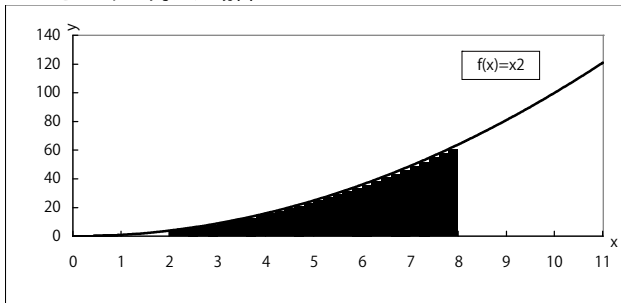


表8.2 図8.5の網目部分の面積の求め方

x	幅	$f(x)$ (高さ)	面積
2 ~ 2.2	0.2	$2 \times 2 = 4$	$0.2 \times 4 = 0.8$
2.2 ~ 2.4	0.2	$2.2 \times 2.2 = 4.84$	$0.2 \times 4.84 = 0.968$
2.4 ~ 2.6	0.2	$2.4 \times 2.4 = 5.76$	$0.2 \times 5.76 = 1.152$
...	...	...	...
7.6 ~ 7.8	0.2	$7.6 \times 7.6 = 57.76$	$0.2 \times 57.76 = 11.552$
7.8 ~ 8	0.2	$7.8 \times 7.8 = 60.84$	$0.2 \times 60.84 = 12.168$
合計			162.04

■積分記号で表す

ここまでの話を一般化してみましょう。

関数 $f(x)$ / x 軸 / $x = a$ / $x = b$ の4つの線で囲まれた部分の面積は、以下の手順で求めることができます。

$x = a$ から $x = b$ の間を刻み、長方形の面積の和で近似する

刻みの幅をどんどん小さくして0に近づける（刻みの数を無限に増やす）

このような計算のことを「定積分」と呼び、以下のような記号で表します。

$$\int_a^b f(x) dx$$

例えば図8.2の面積は、以下の定積分で表すことができます。

$$\int_2^8 x^2 dx$$

■積分の計算

定積分を実際に計算するには、「不定積分」が必要になります。ある関数 $f(x)$ の不定積分が $F(x) + C$ (C は任意の定数) という関数になる場合、不定積分は以下のように表します。

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

上記の関係がある場合、定積分は以下のように求めることができます。

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

また、 $F(b) - F(a)$ のことを $[F(x)]_a^b$ と書きます。例えば、 $f(x) = x^2$ の不定積分は、

以下になることが知られています。この場合、 $F(x)$ に相当するのは $\frac{1}{3}x^3$ にあたります。

$$\int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

ここから、先ほどの図8.2の面積は、以下のように求めることができます。

$$\int_2^8 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_2^8 = \frac{1}{3}(8^3 - 2^3) = 168$$

主な関数の不定積分は、表8.3のようになります。なお、表の2行目の「1」の不定積分は、1行目の x^n の不定積分で n に0を代入した場合にあたります。

表8.3 主な関数の不定積分

関数	不定積分
x^n (ただし、 $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
1	$x + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
e^x	$e^x + C$

■定積分の性質

定積分には以下のような性質があります。

和（差）の定積分

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ がある場合、その和（差）の関数の定積分は、個々の関数の定積分の和（差）と等しくなります。式で書くと以下の通りです。

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

関数の定数倍の定積分

ある関数 $f(x)$ を c 倍 (c は定数) したものの定積分は、 $f(x)$ の定積分の c 倍と等しくなります。式で書くと以下の通りです。

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

範囲を2つに分ける

$a < b < c$ という関係があるときに、 a から c までの定積分は、 a から b までの定積分と b から c までの定積分の和になります。式で書くと以下の通りです。

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

■定積分の例

定積分に慣れるために、いくつか練習問題を行っておきましょう。

$$\begin{aligned} & \int_2^5 (3x^2 + 4x + 2)dx \\ &= 3 \int_2^5 x^2 dx + 4 \int_2^5 x dx + 2 \int_2^5 1 dx \\ &= 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^5 + 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^5 + 2 \left[x \right]_2^5 \\ &= 165 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^3 (2e^x + 3x)dx \\ &= 2 \int_0^3 e^x dx + 3 \int_0^3 x dx \\ &= 2 \left[e^x \right]_0^3 + 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= 2(e^3 - 1) + 3 \left(\frac{9}{2} - 0 \right) \\ &= 2e^3 + \frac{23}{2} \end{aligned}$$

★行列

多変量解析など、多数の変数を扱う際には、「行列」という手法を使うことがよくあります。

■行列の概要

行列は、多数の値を縦横に並べたものです。値を横に並べたひとまとまりのことを「行」と呼び、行を縦に並べて行列を作ります。また、縦に並んだ値のひとまとまりのことを、「列」と呼びます。

例えば、以下は行が2行、列が3列ある行列です。

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

行が m 行、列が n 列ある行列のことを、「 m 行 n 列行列」や「 $m \times n$ 行列」などと呼びます。また、行 / 列の数が同じになっている行列を、「正方行列」と呼びます。

行列を記号で表す場合、通常は「 A 」や「 X 」といった大文字のアルファベットを使います。

■行列の和／差

行 / 列の数が同じ行列どうしでは、和と差を定義することができます。2つの行列の和 / 差は、それぞれの行列の行 / 列が同じ要素どうしの和 / 差からなる行列になります。

例えば、以下のように2つの2行3列行列があるとします。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき、2つの行列の和と差は以下のように求めます。

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 + (-2) & (-3) + (-4) & 2 + 5 \\ (-4) + 6 & 6 + (-1) & 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 - (-2) & (-3) - (-4) & 2 - 5 \\ (-4) - 6 & 6 - (-1) & 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -10 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

■ 行列の積

2つの行列AとBがあるときに、その積ABを定義することもできます。AとBの積をCとすると、Cの*i*行*j*列の値は、Aの*i*行目のそれぞれの値と、Bの*j*列目のそれぞれの値を掛けて足し合わせた値になります。

例えば、以下の2つの行列があるとします。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき、AとBの積は以下のようにして求めます。

$$AB = \begin{bmatrix} 5 \times (-2) + (-3) \times (-4) + 2 \times 5 & 5 \times 6 + (-3) \times (-1) + 2 \times 3 \\ (-4) \times (-2) + 6 \times (-4) + 1 \times 5 & (-4) \times 6 + 6 \times (-1) + 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 39 \\ -11 & -27 \end{bmatrix}$$

なお、A / B 2つの行列の積を求める場合、行列Aの列数と、行列Bの行数が一致していることが必要です。例えば、上の例では、Aが2行3列、Bが3行2列の行列で、Aの列数とBの行数が一致しています。

また、行列Aが*p*行*q*列、行列Bが*q*行*r*列だとすると、積の行列は*p*行*r*列になります。

す。上の例だと、行列Aが2行、行列Bが2列なので、積の行列は2行2列になっています。

■単位行列

正方行列の中で、 i 行 i 列の要素の値が1で、それ以外の要素の値が0の行列のことを、「単位行列」と呼びます。単位行列は、一般に「 E 」や「 I 」といった文字で表します。例えば、 3×3 の単位行列は以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ある行列Aがある場合、Aと単位行列Iとの積は、Aになります（ $AI = A$ ）。また、単位行列Iと行列Aの積もAになります（ $IA = A$ ）。このように、単位行列は、一般的な数の計算でいえば、数値の「1」と似た性質があります（「ある数に1を掛けても、元の数のまま」という性質）。

■逆行列

Aという行列とIという単位行列があるときに、以下の関係を満たすような行列 A^{-1} のことを、「Aの逆行列」と呼びます。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

逆行列は、一般的な数の計算でいうところの逆数と似た性質を持ちます（「ある数に、その数の逆数を掛けると1になる」という性質）。

■逆行列を使って連立方程式を解く

以下のような n 個の方程式からなる連立方程式を解き、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を求めたいとします。

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

この方程式は、以下のように行列A / X / Bを置くと、行列の積の書き方を使って、 $AX = B$ と表すことができます。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$AX = B$ の式は、以下のように変形することができます。

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (\text{式の両辺にAの逆行列}A^{-1}\text{を掛ける})$$

ここで、Aと A^{-1} の積は単位行列であり、また単位行列とXとの積はXなので、以下の関係が成り立ちます。

$$X = A^{-1}B$$

Xは、元の連立方程式で求めたい値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を、行列で表したものでした。したがって、上の式は、連立方程式の解を得る式になっていることが分かります。

■Excelで行列の積と逆行列を計算する

Excelには、行列の積を求める「MMULT」関数と、逆行列を求める「MINVERSE」関数があります。

●MMULT関数

MMULT関数は、以下のように書きます。

=MMULT(1つめの行列のセル範囲,2つ目の行列のセル範囲)

ただし、行列の積は複数の行 / 列に及びますので、「配列数式」という入力方法を使って、複数のセルに一度に式を入力します。

p行q列の行列と、q行r列の行列の積を求める場合、結果はp行r列になります(XXページ参照)。そこで、ワークシート上でp行r列分のセル範囲を選択します。その後、MMULT関数の式を入力し、Ctrl / Shift / Enterキーを同時に押します。

画面8.4は、XXページの行列の積の例を、MMULT関数で計算した例です。A / B2つの行列をそれぞれA1～C2 / E1～F3セルに入力し、A5～B6セルにMMULT関数の式を入力しています。この式は以下の手順で入力します。

A5～B6セルを選択します。

キーボードで「=MMULT(」と入力します。

マウスでA1～C2セルを選択します。

キーボードで「,」を入力します。

マウスでE1～F3セルを選択します。

キーボードで「)」を入力します。

Ctrl / Shift / Enterキーを同時に押します。

画面8.4 MMULT関数の入力例

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5	-3	2		-2	6		
2	-4	6	1		-4	-1		
3					5	3		
4								
5	12	39						
6	-11	-27						

●MINVERSE関数

MINVERSE関数は以下のように書きます。

=MMULT(1つめの行列のセル範囲,2つ目の行列のセル範囲)

また、MINVERSE関数は、MMULT関数と同様に、配列数式の機能を使って複数のセルに同時に式を入力します。

画面8.5は、MINVERSE関数を使って、逆行列を求める例です。A1～B2セルに行列を入力し、その逆行列をD1～E2セルに求めています。MINVERSE関数は、以下の手順で入力します。

D1～E2セルを選択します。

キーボードで「=MINVERSE(」と入力します。

マウスでA1～B2セルを選択します。

キーボードで「)」を入力します。

Ctrl / Shift / Enterキーを同時に押します。

画面8.5 MINVERSE関数の入力例



The screenshot shows a Microsoft Excel window with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		2	5	-0.57143	0.714286			
2		3	4	0.428571	-0.28571			
3								
4								
5								
6								

The formula bar shows the formula: `=MINVERSE(A1:B2)`. The status bar at the bottom shows: コマンド 平均: 0.071428571 データの個数: 4 合計: 0.285714286.